Н. П. Пильник, И. П. Станкевич, Динамическая модель взаимодействия фирмы и ее собственников, *Матем. моделирование*, 2015, том 27, номер 1, 65–83

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ 2015 год, том 27, номер 1, стр. 65-83

УДК 519.865.3

ДИНАМИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ ВЗАИМОДЕЙСТВИЯ ФИРМЫ И ЕЕ СОБСТВЕННИКОВ

© *2015 г.* ***Н.П. Пильник[1,2], И.П. Станкевич[1]***

[1] НИУ ВШЭ
[2] ВЦ РАН, Москва
u4d@yandex.ru; vpvstankevich@yandex.ru

Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда (проект №14-11-00432).

Представлена модель общего равновесия двух агентов: собственника-потребителя и фирмы-производителя. Ее отличительной особенностью является описание фирмы как акционерного общества, целью деятельности которого является максимизация приведенного объема выплаченных дивидендов. Получено полное решение при любых начальных условиях. Показано, что равновесие в модели эффективно.

Ключевые слова: модель общего равновесия, акционерный капитал, межвременное равновесие, функционал производителя.

DYNAMIC MODEL OF INTERACTION BETWEEN THE FIRM AND ITS OWNERS

N.P. Pilnik[1,2], I.P. Stankevich[1]

[1] Higher School of Economics
[2] Computing Centre of RAS

In this article model of intertemporal equilibrium of two agents (a firm-producer and a proprietor-consumer) is presented. Its distinguishing feature is the description of the firm as a joint stock company, the purpose of which is to maximize the present value of dividends paid. A complete solution for all initial conditions is obtained. It is shown that the equilibrium in the model is effective.

Key words: general equilibrium model, equity, intertemporal equilibrium, functional of producer.

1. Введение

В настоящей работе предпринята попытка прояснить вопрос о том, как следует описывать поведение фирмы и ее взаимоотношения с ее собственниками в динамических моделях общего равновесия. Может показаться, что актуальность данной темы полностью нивелируется очевидностью ответа, поскольку практически во всех микроэкономических моделях и моделях общего равновесия фирма рассматривается как самостоятельный экономический агент, принимающий рациональные решения о размерах и способах производства товаров и услуг. Соответственно, в каждой из таких моделей, часто без специального обсуждения, делаются какие-то конкретные предположения о целях деятельности фирмы.

Тем не менее, единства и определенности в этом вопросе экономическая теория отнюдь не достигла. Похоже, стороны просто исчерпали аргументы, и автор новой модели выбирает один из принятых вариантов описания целей деятельности фирмы, сообразуясь с собственным мнением и задачами моделирования.

Основная часть микроэкономических моделей – статические. Целью деятельности в таких фирмах обычно считается максимизация прибыли

$$\pi = p(q)\,q - c(q) \to \max_{q}\,. \tag{1.1}$$

Несмотря на широкое распространение идеи о максимизации фирмой собственной прибыли, оговаривается и спорность такой предпосылки, особенно в связи с анализом структуры отраслевых рынков [1, 2].

В динамических микроэкономических моделях целью фирмы обычно считается максимизация ожидаемой дисконтированной (приведенной) прибыли или NPV, которая в случае дискретного времени имеет вид

$$NPV = \sum_{t=0}^{T} \pi_t \left(1+r\right)^{-t} \to \max_{\{q_t\}_{t=0}^{T}}\,, \tag{1.2}$$

где дисконтирующий фактор $r > 0$ обычно (но не всегда) отождествляется с безрисковой ставкой процента, а прибыль вычисляется в каждом периоде согласно (1.1).

Вид функционала (1.2) обосновывается соображениями об альтернативах вложения средств у собственника фирмы. Функционал (1.2) широко используется не только в моделях, но и в прикладных методиках финансового анализа. В [3] в довольно общих предположениях показано, что решение (1.2) дает приближенное решение задачи о минимизации вероятности разорения фирмы. Это позволяет рассматривать NPV как критерий отбора фирм, способных выжить в условиях конкуренции и угрозы финансового разорения.

Надо отметить, что использование функционала (1.2) для описания поведения фирмы в рамках моделей общего равновесия, в которых должны определяться не только цены, но и ставки процента, часто приводит к вырождению системы соотношений модели (см., например, [4]).

В модели Эрроу-Дебре [5] идея максимизации прибыли реализуется в рамках модели общего равновесия. В исходной постановке эта модель статическая, хотя, как правило, переход к динамической конструкции осуществляется за счет представления одного товара в разные моменты времени как разных товаров. Модель описывает поведение конечного множества потребителей и производителей. Производители в модели максимизируют суммарный объем прибыли, который делится в заданных (возможно разных в разные моменты времени) пропорциях между потребителями. Тем не менее, динамической стандартная переформулировка модели Эрроу-Дебре является лишь формально. По сути, модель представляет собой последовательность статических моделей, не связанных между собой. Вполне естественно считать, что указанная связь должна описываться с помощью финансовых потоков, описывающих инвестиционную деятельность производителей и сбережения потребителей, а следовательно, и механизмы управления долгосрочными средствами производства, однако их добавление сталкивается с рядом принципиальных трудностей.

Последовательный переход к динамическому случаю удалось сделать И.Г. Поспелову в модели с управлением капиталом, представленной в [6]. В данной модели потребители определяют траектории собственных вложений в фирмы (капиталы) с учетом обещанной фирмой доходностью. Цель деятельности фирмы в данной модели – максимизация собственного курса в начальный момент времени, представляющего собой отношение капитализации фирмы к начальному уровню капитала.

В модели с управлением капиталом собственник не управляет непосредственно развитием производства. Он строит свои планы, опираясь исключительно на финансовые показатели – курс и доходность. Тем не менее, с содержательной точки зрения модель оставляет неудовлетворенность тем, что, во-первых, курсы определяются фирмой, а не рынком капитала, а во-вторых, капиталовложения имеют приемлемую содержательную интерпретацию, только если фирма не выпускает новых акций.

Другим вариантом описания взаимодействия фирмы и ее собственников для динамического случая является модель Сидравского, описанная в [7]. В данной конструкции потребитель максимизирует полезность не только потребления, но и реальных денежных остатков. Производственные фонды фактически отождествляются со сбережениями и находятся под прямым управлением потребителя. Фирме же остается задача распределения ресурсов между технологиями и определение объема производства в каждый отдельный момент времени. По сути, ровно эта конструкция с многочисленными надстройками, но незначительными изменениями используется в большинстве моделей равновесия, выделяющих фирму-производителя как отдельного агента [8–10].

Тем не менее, такой подход представляется не слишком подходящим, когда речь идет о построении моделей динамического равновесия, отражающих фактически сложившиеся экономические механизмы и институты. В современных условиях собственники капитала не только не управляют, но, как правило, и не знают состава, назначения и реальной ценности основных фондов принадлежащих им предприятий.

Следует отметить, что отождествление сбережений и основных фондов исключает возможность исследовать вопрос о структуре источников финансирования инвестиций в базовой конструкции. В том числе в связи с этим исходная модель начинает усложняться за счет добавления дополнительных нелинейных соотношений (в первую очередь, включение в функционалы агентов других переменных) или введения стохастических переменных, специфика варьирования по которым приводит к целому набору нетривиальных ограничений. С нашей точки зрения, вынужденная сложность итоговых конструкций связана не столько с особенностями описываемых явлений, сколько с дефектом базовой конструкции.

Особенно сложным вопрос о целях фирмы становится в динамических моделях, в которых необходимо описывать инвестиционную деятельность и выбор источников ее финансирования: использование собственных накоплений, выпуск акций или выпуск облигаций. Наконец, старый вопрос о целях деятельности фирмы снова приобретает актуальность в связи с появлением моделей равновесия рациональных ожиданий, учитывающих специфику фактически сложившихся в экономике отношений [11].

Предложенный в статье механизм получен как результат декомпозиции задачи благосостояния, описанной еще в [12]. Как ни странно, но выбор в качестве отправной точки критерия эффективности (в смысле задачи благосостояния) позволяет, с одной стороны, получить достаточно гармоничную модель, без особых проблем дополняемую банковским сектором или перетоками капиталов через границу, а с другой стороны, пригодную для прикладных расчетов, что было продемонстрировано в рамках моделирования экономики Республики Казахстан, в динамической модели общего равновесия которой была воспроизведена крайне нетривиальная траектория фондового индекса KAZE (описание модели приводится в [13]).

2. Используемые предпосылки и система обозначений

Экономическую динамику здесь и ниже будем описывать **в непрерывном времени.** Такой выбор обусловлен чисто прагматическими причинами: непрерывные модели проще строить и исследовать аналитически, но их сложнее сопоставлять со статистикой, исследовать численно и доказывать для них общие теоремы существования в отсутствие явного решения[1].

Предполагается, что экономика замкнута и в ней выпускается единственный однородный продукт, который используется как для потребления, так и для инвестиций. Следовательно, можем записать $Y(t) = C(t) + J(t)$, где $Y(t)$ – выпуск продукции в экономике (ВВП в сопоставимых ценах), $C(t)$ – совокупное конечное потребление, а $J(t)$ представляет собой величину валового накопления.

Также будем считать, что накопленные инвестиции служат единственным фактором производства, причем производственная функция линейно зависит от этого фактора. Накопленные инвестиции в данном случае мы считаем эквивалентными капиталу как средству производства. Поэтому $Y(t) = K(t)/b$, где $K(t)$ – объем накопленных инвестиций, а коэффициент приростной фондоемкости b имеет размерность времени и смысл характерного времени строительства. Одновременно он показывает обратную величину постоянной предельной производительности капитала в линейной производственной функции.

Наконец, предположим, что выбытия производственных фондов нет, но возможны дезинвестиции – превращение производственных фондов обратно в продукт без потерь. Тогда $\frac{d}{dt}K(t) = J(t)$. Сделанные предположения могут быть формально записаны в виде одного соотношения, которое объединяет материальный баланс и выражение для производственной функции

$$Y(t) = C(t) + b\left(\frac{d}{dt}Y(t)\right). \qquad (2.1)$$

В качестве временного множества будем использовать отрезок $[t0, T]$. Выпуск $Y(t)$ в рассматриваемом описании реального сектора оказывается фазовой переменной, и для

[1] В непрерывных моделях, в отличие от дискретных, потоки невозможно спутать с запасами, а темпы роста – с пропорциями. Использовавшиеся для исследования моделей системы компьютерной алгебры прекрасно оперируют интегралами, но весьма посредственно – суммами. Наконец, если решение непрерывной оптимизационной задачи получено явно, то его корректность обычно можно обосновать простыми достаточными условиями оптимальности, а когда явного решения нет, приходится опираться на необходимые условия, которые в непрерывном случае гораздо сложнее, чем в дискретном.

него считается заданным начальное условие

$$Y(t0) = Y_0 > 0\,. \tag{2.2}$$

Множеством допустимых траекторий чистых выпусков здесь следует считать множество всех неотрицательных кусочно-непрерывных функций $Y(t)$ с одним и тем же значением в начале (2.2). Заметим, что приведенный ниже целевой функционал не допускает отрицательных значений $C(t)$, а при положительных $C(t)$ решение дифференциального уравнения (2.1) с условием (2.2), как легко проверить, не может подойти к оси абсцисс снизу. Поэтому для выполнения неравенства $Y(t) \geq 0$ при всех $t \in \left[t0, T\right]$ необходимо и достаточно потребовать выполнения терминального условия

$$Y_H(T) \geq 0\,. \tag{2.3}$$

Всюду далее в качестве функций полезности агентов нами используется так называемая функция CRRA (функция с постоянной относительной несклонностью к риску).

$$U(C) = \frac{C^{(1-\beta)}}{1-\beta} \quad \text{при} \quad \beta \neq 1, \qquad U(C) = \ln(C) \quad \text{при } \beta = 1. \tag{2.4}$$

Ниже в данном разделе при записи и решении задач агентов используется особая система обозначений[2]:

при записи и решении задачи одного из агентов функции времени с индексами «*H*» и «*P*», например, $S_H(t)$, $Y_P(t)$ обозначают планируемые и двойственные переменные (управления) соответственно потребителя и производителя.

при записи и решении задачи одного из агентов функции времени с индексами малыми буквами, например, $p_y(t)$, $\theta_a(t)$ или $r_{lcp}(t)$ обозначают информационные переменные (показатели конъюнктуры), которые агенты должны прогнозировать и которые, соответственно, считаются заданными функциями времени при решении задач агентов.

Стоящее в отдельной строке выражение вида $\left[a\right]\left[b\right]$ без знаков равенства или неравенства обозначает условие дополнительности, т.е. систему соотношений

$$\left[a\right]\left[b\right] \Leftrightarrow a \geq 0\,, \quad b \geq 0\,, \quad a\,b = 0\,. \tag{2.5}$$

3. Регулярность решения задачи агента и регулярность равновесия

Далее для корректного решения задач агентов нам нужно определиться с классами объектов, в которых следует искать прямые и двойственные переменные. При информационных переменных, представляемых как возмущения общего вида, двойственные переменные могут оказаться мерами сложной структуры. Нам, однако, нужны решения не при произвольных, а только при равновесных значениях информационных переменных. Естественно ожидать, что при разумной постановке задачи равновесные значения параметров конъюнктуры будут достаточно регулярны, чтобы и двойственные переменные, имеющие экономический смысл внутренних цен, тоже оказались регулярными.

---

[2] Такая запись используется в системе ЭКОМОД, которая активно использовалась при написании работы и более подробно охарактеризована в п. 5.

В контексте моделей, рассматриваемых в этой и следующих пунктах, **регулярным решением** задачи агента назовем набор прямых и двойственных переменных такой, что **(1)** функции, описывающие прямые переменные, доставляют максимум функционалу Лагранжа по множеству всех кусочно-дифференцируемых функций, описывающих прямые переменные типа «запас» и удовлетворяющих заданным начальным условиям, и множеству кусочно-непрерывных функций, описывающих прямые переменные типа «поток»; **(2)** функции, описывающие двойственные переменные к динамическим ограничениям, – кусочно-дифференцируемы, а функции, описывающие двойственные переменные к статическим ограничениям, – кусочно-непрерывны; **(3)** почти всюду на $[t0,T]$ выполнены условия дополняющей нежесткости задачи агента.

Регулярное решение, разумеется, является решением в обычном смысле, но его существование требует выполнения определенных условий на параметры задачи.

В свою очередь, **регулярным равновесием** назовем набор прямых, информационных и двойственных переменных всех задач агентов такой, что **(1)** функции, описывающие информационные переменные, ограничены и интегрируемы на $[t0,T]$; **(2)** наборы прямых и двойственных переменных задачи каждого агента при заданных информационных переменных образуют регулярное решение задачи этого агента; **(3)** почти всюду на $[t0,T]$ выполняется условие равновесия модели.

4. Задача оптимального планирования потребления

Рассмотрим задачу оптимального планирования в непрерывном времени в рамках сделанных выше предпосылок. Потребитель сам планирует производство в соответствии со своими интересами. В этом случае собственник решает задачу

$$\int_{t0}^{T} U(C_H(t))\exp(-\delta_H t)dt \to \max$$

для функции полезности вида (2.4), за счет выбора величин $C_H(t)$, $Y_H(t)$, удовлетворяющих (2.1), (2.2), (2.3).

Такая задача планирования – это стандартная задача теории экономического роста. Необходимо найти такое разделение дохода на потребление и накопление (инвестиции), которое являлось бы оптимальным с точки зрения общества, а в данном случае – агрегированного собственника, представляющего всю совокупность домашних хозяйств. Далее мы будет называть равновесие в произвольной модели **эффективным**, если реализующаяся в нем траектория потребления совпадает с решением задачи оптимального планирования потребления (задачи благосостояния).

Утверждение 1. Регулярным решением задачи оптимального планирования потребления являются следующие траектории потребления и выпуска:

$$C_H(t) = Y_H(t0)\frac{1-\delta_H b-\beta_H}{\beta_H}\frac{\exp\left(\dfrac{1-\delta_H b}{\beta_H b}(t-t0)\right)}{\exp\left(\dfrac{1-\delta_H b-\beta_H}{\beta_H b}(T-t0)\right)-1},$$

$$Y_H(t) = Y_H(t0)\exp\left(\frac{t}{b}\right)\left(1 - \frac{\exp\left(\dfrac{1-\delta_H b - \beta_H}{\beta_H b}(t-t0)\right)-1}{\exp\left(\dfrac{1-\delta_H b - \beta_H}{\beta_H b}(T-t0)\right)-1}\right).$$

Доказательство утверждения 1. Как известно [6], для нахождения оптимальной траектории достаточно найти точку максимума функционала Лагранжа

$$\int_{t0}^{T} U(C_H(t))\exp(-\delta_H t) + \psi 1_H(t)\left(Y_H(t) - C_H(t) - b\frac{d}{dt}Y_H(t)\right)dt + \Phi 1_H Y_H(T) \qquad (4.1)$$

по $C_H(t)$, $Y_H(t)$ при некотором наборе двойственных переменных $\psi 1_H(t)$, $\Phi 1_H$, которые должны быть выбраны так, чтобы в точке максимума функционала Лагранжа выполнялись условия дополняющей нежесткости

$$Y_H(t) - C_H(t) - b\frac{d}{dt}Y_H(t) = 0, \qquad [\Phi 1_H][Y_H(T)]. \qquad (4.2)$$

Поскольку функционал (4.1) вогнутый, то точку его максимума можно найти стандартной процедурой интегрирования по частям и последующим варьированием по прямым переменным $C_H(t)$, $Y_H(t)$. В результате получится система уравнений

$$\left(D(U)(C_H(t))\exp(-\delta_H t) - \psi 1_H(t)\right)dC_H = 0, \qquad (4.3)$$

$$\left(\psi 1_H(t) + b\frac{d}{dt}\psi 1_H(t)\right)dY_H = 0, \qquad (4.4)$$

$$\left(-b\psi 1_H(T) + \Phi 1_H\right)dY_H(T) = 0. \qquad (4.5)$$

В силу свойств функции полезности $U(\cdot)$ $C_H(t) > 0$. Поэтому левая часть (4.3) положительна, а следовательно, $\psi 1_H(t) > 0$. Но тогда из (4.5) следует, что $\Phi 1_H > 0$, а это означает, что терминальное ограничение (4.2) выполняется как равенство. Исключив из (4.3), (4.4) $\psi 1_H(t)$ и $\Phi 1_H$, получим систему уравнений

$$Y_H(t) - C_H(t) - b\frac{d}{dt}Y_H(t) = 0, \qquad \frac{d}{dt}C_H(t) = \frac{1-\delta_H b}{\beta_H b}C_H(t), \qquad Y_H(T) = 0,$$

которая легко решается и дает следующие выражения для оптимальной траектории:

$$C_H(t) = Y_H(t0)\frac{1-\delta_H b - \beta_H}{\beta_H}\frac{\exp\left(\dfrac{1-\delta_H b}{\beta_H b}(t-t0)\right)}{\exp\left(\dfrac{1-\delta_H b - \beta_H}{\beta_H b}(T-t0)\right)-1},$$

$$Y_H(t) = Y_H(t0)\exp\left(\frac{t}{b}\right)\left(1 - \frac{\exp\left(\frac{1-\delta_H b-\beta_H}{\beta_H b}(t-t0)\right)-1}{\exp\left(\frac{1-\delta_H b-\beta_H}{\beta_H b}(T-t0)\right)-1}\right). \qquad (4.6)$$

Оба выражения неотрицательны при всех значениях параметров. ■

Устремив временной горизонт задачи оптимального планирования к бесконечности $T \to +\infty$, перейдем к так называемым магистральным траекториям. В зависимости от знака коэффициента в показателе экспоненты возможны два случая (точное равенство нулю в данном случае мы игнорируем). Пусть $1-\delta_H b-\beta_H > 0$. Тогда реализуются следующие траектории:

$$C_H(t) = 0, \qquad Y_H(t) = Y_H(0)\exp\left(\frac{t-t0}{b}\right). \qquad (4.7)$$

Данные уравнения описывают не что иное, как режим с отложенным потреблением[3], в котором домохозяйство откладывает все свое потребление на последний момент. Но так как мы рассматриваем бесконечный горизонт планирования, то потребление обнуляется на всем временном интервале.

Другой возможный случай $1-\delta_H b-\beta_H < 0$. Тогда оптимальные при бесконечном горизонте планирования имеют вид

$$C_H(t) = Y_H(t0)\frac{-\left(1-b\delta_H-\beta_H\right)}{\beta_H}\exp\left(\frac{1-\delta_H b}{\beta_H b}\left(t-t0\right)\right),$$

$$Y_H(t) = Y_H(t0)\exp\left(\frac{1-\delta_H b}{\beta_H b}\left(t-t0\right)\right). \qquad (4.8)$$

В отличие от первого случая, здесь потребление все время остается положительным. Именно поэтому далее нам будет особенно интересен этот набор параметров модели, при котором реализуется оптимальное решение вида (4.8).

5. Модель с акционерным капиталом (S-модель)

5.1. Задача потребителя. Потребитель максимизирует полезность собственного потребления

$$\int_{t0}^{T} U(C_H(t))\exp(-\delta_H t)dt \to \max$$

за счет выбора траекторий потребления $C_H(t)$, объема накопленных сбережений $L_H(t)$ и динамики запасов акций $S_H(t) \geq 0$ в рамках финансового баланса

[3] В этом случае задача потребителя не имеет решения при $T = +\infty$, почему и приходится делать предельный переход в решении задач с конечным T, а не просто сразу ставить задачу с $T = +\infty$.

$$\frac{d}{dt}L_H(t) = -\theta_a(t)\frac{d}{dt}S_H(t) + d_a(t)S_H(t) - p_y(t)C_H(t) + r_{lcp}(t)L_H(t)$$

при заданных начальных условиях $L_H(t0)$, $S_H(t0) > 0$ и терминального ограничения

$$L_H(T) + a_S(T)S_H(T) \geq 0 \tag{5.1}$$

при известных на всем временном отрезке $[t0, T]$ информационных переменных: процентная ставка по депозиту $r_{lcp}(t)$, цена продукта $p_y(t)$, нормы дивидендов $d_a(t)$ и курса акций $\theta_a(t)$.

5.2. Задача производителя. Производитель максимизирует полезность выплаченных потребителю дивидендов

$$\int_{t0}^{T} V\left(\frac{\mathrm{Div}_P(t)}{p_y(t)\exp\left(\frac{t}{b}\right)}\right)\exp(-\delta_P t)dt \to \max$$

за счет выбора траекторий дивидендов $\mathrm{Div}_P(t)$, произведенного продукта $Y_P(t)$, объема взятых кредитов $L_P(t)$ в рамках финансового баланса

$$-\frac{d}{dt}L_P(t) = -r_{lcp}(t)L_P(t) + p_y(t)Y_P(t) - p_y(t)b\frac{d}{dt}Y_P(t) - \mathrm{Div}_P(t) + \theta_a(t)\frac{d}{dt}S_a(t)$$

при заданных начальных условиях $L_P(t0)$, $Y_P(t0) > 0$ и терминального ограничения

$$-L_P(T) + a_Y(T)Y_P(T) \geq 0 \tag{5.2}$$

при известных на всем временном отрезке $[t0, T]$ информационных переменных: процентная ставка по депозиту $r_{lcp}(t)$, цена продукта $p_y(t)$, запас акций у собственника $S_a(t)$ и курс акций $\theta_a(t)$.

5.3. Условия равновесия. В равновесии должны быть выполнены следующие соотношения:

- Основной макроэкономический баланс, описывающий разделение продукта на потребление и накопление (инвестиции)

$$Y_P(t) = C_H(t) + b\frac{d}{dt}Y_P(t). \tag{5.3}$$

- Условие равенства спроса на кредиты и предложения кредитов $L_H(t) = L_P(t)$.
- Правило передачи информации относительно объема выпущенных акций $S_a(t) = S_H(t)$.

- Правило равномерного распределения дивидендов по акциям

$$\mathrm{Div}_P(t) = d_a(t) S_H(t)\,. \tag{5.4}$$

Утверждение 2. Регулярное равновесие в S-модели эффективно и его составляют следующие траектории переменных:

$$C_H(t) = \frac{1-\delta_H b - \beta_H}{\beta_H} Y_P(t0) \frac{\exp\left(\dfrac{1-\delta_H b}{b\beta_H}(t-t0)\right)}{\exp\left(\dfrac{(T-t0)(1-\delta_H b-\beta_H)}{\beta_H b}\right)-1},$$

$$Y_P(t) = Y_P(t0)\exp\left(\frac{t-t0}{b}\right)\left(1-\frac{\exp\left(\dfrac{(t-t0)(1-\delta_H b-\beta_H)}{\beta_H b}\right)-1}{\exp\left(\dfrac{(T-t0)(1-\delta_H b-\beta_H)}{\beta_H b}\right)-1}\right),$$

$$\mathrm{Div}_P(t) = \mathrm{Div}_P(t0)\exp\left(\frac{\beta_P-\delta_P b}{b\beta_P}(t-t0)\right)\exp\left(\int_{t0}^{t}\iota(u)du\right),$$

$$\theta_a(t0) = \frac{p_y(t0) b Y_P(t0) - L_H(t0)}{S_H(t0)},$$

$$\theta_a(t) = \frac{p_y(t0) b Y_P(t0) - L_H(t0)}{S_H(t0)}\exp\left(\frac{t-t0}{b}\right)\exp\left(\int_{t0}^{t}\iota(u)du\right)\times$$

$$\times\exp\left(-\int_{t0}^{t}\frac{\mathrm{Div}_P(t0)\exp\left(-\dfrac{\delta_P}{\beta_P}(u-t0)\right)}{-\dfrac{L_H(u)}{\exp\left(\dfrac{u-t0}{b}\right)\exp\left(\int_{t0}^{u}\iota(v)dv\right)}+p_y(t0)bY_P(t0)\left(1-\dfrac{\exp\left(\dfrac{(u-t0)(1-\delta_H b-\beta_H)}{\beta_H b}\right)-1}{\exp\left(\dfrac{(T-t0)(1-\delta_H b-\beta_H)}{\beta_H b}\right)-1}\right)}du\right),$$

$$S_H(t) = \frac{S_H(t0)}{p_y(t0) b Y_P(t0) - L_H(t0)}\times$$

$$\times\exp\left(\int_{t0}^{t}\frac{\mathrm{Div}_P(t0)\exp\left(-\dfrac{\delta_P}{\beta_P}(u-t0)\right)}{-\dfrac{L_H(u)}{\exp\left(\dfrac{u-t0}{b}\right)\exp\left(\int_{t0}^{u}\iota(v)dv\right)}+p_y(t0)bY_P(t0)\left(1-\dfrac{\exp\left(\dfrac{(u-t0)(1-\delta_H b-\beta_H)}{\beta_H b}\right)-1}{\exp\left(\dfrac{(T-t0)(1-\delta_H b-\beta_H)}{\beta_H b}\right)-1}\right)}du\right)\times$$

$$\times\left(-\frac{L_H(t)}{\exp\left(\dfrac{t-t0}{b}\right)\exp\left(\int_{t0}^{t}\iota(u)du\right)}+p_y(t0)bY_P(t0)\left(1-\frac{\exp\left(\dfrac{(t-t0)(1-\delta_H b-\beta_H)}{\beta_H b}\right)-1}{\exp\left(\dfrac{(T-t0)(1-\delta_H b-\beta_H)}{\beta_H b}\right)-1}\right)\right).$$

Траектория $L_H(t)$ не определяется и может задаваться произвольным образом.

Доказательство утверждения 2 (см. пп.5.4-5.6).

5.4. Решение задачи потребителя. Для оптимальности выбора величин $C_H(\cdot)$, $L_H(\cdot)$, $S_H(\cdot)$ достаточно, чтобы они доставляли максимум функционалу Лагранжа

$$\int_{t0}^{T}\Big(U\big(C_H(t)\big)\exp(-\delta_H t)+\psi 1_H(t)\Big(d_a(t)S_H(t)-\theta_a(t)\frac{d}{dt}S_H(t)-p_y(t)C_H(t)+$$
$$+r_{lcp}(t)L_H(t)-\frac{d}{dt}L_H(t)\Big)+\phi 2_H(t)S_H(t)\Big)dt+\Phi 1_H\big(L_H(T)+a_S(T)S_H(T)\big) \quad (5.5)$$

при некотором наборе двойственных переменных $\psi 1_H(t)$, $\phi 2_H(t)\geq 0$, $\Phi 1_H\geq 0$, и при этом выполнялись условия дополняющей нежесткости:

$$d_a(t)S_H(t)-\theta_a(t)\frac{d}{dt}S_H(t)-p_y(t)C_H(t)+r_{lcp}(t)L_H(t)-\frac{d}{dt}L_H(t)=0\,, \quad (5.6)$$

$$[\phi 2_H(t)][S_H(t)], \quad (5.7)$$

$$[\Phi 1_H][L_H(T)+a_S(T)S_H(T)]. \quad (5.8)$$

При максимизации функционала Лагранжа (5.5) в нем можно выполнить интегрирование по частям

$$\int_{t0}^{T}\Big(U\big(C_H(t)\big)\exp(-\delta_H t)+\psi 1_H(t)\big(d_a(t)S_H(t)-p_y(t)C_H(t)+r_{lcp}(t)L_H(t)\big)+$$
$$+\frac{d}{dt}\psi 1_H(t)\theta_a(t)S_H(t)+\psi 1_H(t)\frac{d}{dt}\theta_a(t)S_H(t)+\frac{d}{dt}\psi 1_H(t)L_H(t)+$$

$$+\phi 2_H(t)S_H(t)\Big)dt+\Phi 1_H\left(L_H(T)+a_S(T)S_H(T)\right)-\psi 1_H(T)L_H(T)+ \\ +\psi 1_H(t0)L_H(t0)-\psi 1_H(T)\theta_a(T)S_H(T)+\psi 1_H(t0)\theta_a(t0)S_H(t0). \tag{5.9}$$

Это выражение достигает максимума по $C_H(\cdot)$, $L_H(\cdot)$, $S_H(\cdot)$ тогда и только тогда, когда почти всюду на $[t0,T]$ обращаются в 0 производные по $C_H(t)$, $L_H(t)$, $S_H(t)$ подынтегрального выражения в (5.9)

$$0=\Big(D\big(U\big)\big(C_H(t)\big)\exp(-\delta_H t)-\psi 1_H(t)p_y(t)\Big)dC_H, \tag{5.10}$$

$$0=\left(\psi 1_H(t)r_{lcp}(t)+\frac{d}{dt}\psi 1_H(t)\right)dL_H, \tag{5.11}$$

$$0=\left(\psi 1_H(t)d_a(t)+\frac{d}{dt}\psi 1_H(t)\theta_a(t)+\psi 1_H(t)\frac{d}{dt}\theta_a(t)+\phi 2_H(t)\right)dS_H, \tag{5.12}$$

а также производная (5.9) по $L_H(T)$, $S_H(T)$

$$0=\left(-\psi 1_H(T)+\Phi 1_H\right)\,dL_H(T), \tag{5.13}$$

$$0=\left(-\psi 1_H(T)\theta_a(T)+\Phi 1_H a_B(T)\right)\,dS_H(T). \tag{5.14}$$

Соотношения (5.6)-(5.8), (5.10)-(5.14) образуют полную систему условий для определения решения задачи собственника-потребителя.

В силу неотрицательности двойственных переменных $\Phi 1_H$ и $\psi 1_H(t)$ из (5.11) и (5.13) следует, что непрерывная функция $\psi 1_H(t)$ неотрицательна при всех $t\in[t0,T]$.

Рассмотрим условие (5.10). Поскольку функция $C_H(t)$ является кусочно-непрерывной, то она ограничена на $[t0,T]$, а тогда, в силу свойств функции полезности $U(\cdot)$, выполнено неравенство $C_H(t)>0$, первое слагаемое уравнения (5.10) положительно и отделено от нуля на $[t0,T]$. Следовательно, $\psi 1_H(t)$ тоже отделена от нуля, то есть $\psi 1_H(t)>0$, а согласно (5.12)

$$\Phi 1_H>0. \tag{5.15}$$

В силу последнего условия и (5.8) терминальное условие в регулярном равновесии выполнено как равенство

$$L_H(T)+a_S(T)S_H(T)=0. \tag{5.16}$$

Из неравенства (5.15) и (5.13), (5.14) следует, что решение существует только при следующих значениях коэффициентов в терминальном ограничении (5.1):

$$a_S(T)=\theta_a(T). \tag{5.17}$$

Введем новую переменную $\rho_H(t) = -\dfrac{\frac{d}{dt}\psi1_H(t)}{\psi1_H(t)}$, которую можно интерпретировать как доходность активов, которыми располагает агент. Тогда из (5.11) следует

$$\rho_H(t) = r_{kp}(t). \tag{5.18}$$

В свою очередь в предположении, что мы рассматриваем только режимы с положительным запасом акций $S_H(t) > 0$, запишем на основе (5.7), (5.12)

$$\phi2_H(t) = 0, \qquad \rho_H(t) = \frac{\frac{d}{dt}\theta_a(t) + d_a(t)}{\theta_a(t)}. \tag{5.19}$$

Поскольку первое слагаемое (5.10) кусочно-дифференцируемо, функция $C_H(t)$ тоже кусочно-дифференцируема. Взяв от обеих частей уравнения (5.10) логарифмическую производную, получим

$$\frac{d}{dt}C_H(t) = \frac{\left(-\rho_H(t) + \delta_H + \iota(t)\right)D(U)\left(C_H(t)\right)}{\left(D^{(2)}\right)(U)\left(C_H(t)\right)},$$

где $\iota(t) = \left(\frac{d}{dt}p_y(t) \Big/ p_y(t)\right)$ – темп инфляции.

С учетом вида функции полезности собственника (2.4) и (5.18) это уравнение записывается в виде

$$\frac{d}{dt}C_H(t) = \frac{\left(r_{lcp}(t) - \delta_H - \iota(t)\right)C_H(t)}{\beta_H}.$$

Разрешив это уравнение, получим

$$C_H(t) = C_H(t0)\exp\left(\int\limits_{t0}^{t} \frac{\left(r_{lcp}(u) - \delta_H - \iota(u)\right)}{\beta_H}du\right). \tag{5.20}$$

5.5. Решение задачи производителя. Для оптимальности выбора величин $Y_P(\cdot)$, $L_P(\cdot)$, $\mathrm{Div}_P(\cdot)$ достаточно, чтобы они доставляли максимум функционалу Лагранжа

$$\int_{t0}^{T} V\left(\frac{\mathrm{Div}_P(t)}{p_y(t)\exp\left(\frac{t}{b}\right)}\right)\exp(-\delta_P t) +$$

$$+\psi 1_P(t)\left(\frac{d}{dt}L_P(t) - r_{lcp}(t)L_P(t) + p_y(t)Y_P(t) - p_y(t)b\frac{d}{dt}Y_P(t) - \right.$$
$$\left. - \mathrm{Div}_P(t) + \theta_a\frac{d}{dt}S_a(t)\right) + \phi 2_P(t)Y_P(t)dt + \Phi 1_P\left(-L_P(T) + a_Y(T)Y_P(T)\right) \quad (5.21)$$

при некотором наборе двойственных переменных $\psi 1_P(t)$, $\phi 2_P(t) \geq 0$, $\Phi 1_P \geq 0$, и при этом выполнялись условия дополняющей нежесткости:

$$\left[\Phi 1_P\right]\left[L_P(T) + a_Y(T)Y_P(T)\right], \quad (5.22)$$

$$[\phi 2_P(t)][Y_P(t)], \quad (5.23)$$

$$\frac{d}{dt}L_P(t) - r_{lcp}(t)L_P(t) + p_y(t)Y_P(t) - p_y(t)b\frac{d}{dt}Y_P(t) - \mathrm{Div}_P(t) + \theta_a\frac{d}{dt}S_a(t) = 0. \quad (5.24)$$

Интегрирование по частям функционала Лагранжа (5.21) дает

$$\int_{t0}^{T} V\left(\frac{\mathrm{Div}_P(t)}{p_y(t)\exp\left(\frac{t}{b}\right)}\right)\exp(-\delta_P t) - \frac{d}{dt}\psi 1_P(t)L_P(t) + \frac{d}{dt}\psi 1_P(t)p_y(t)bY_P(t) +$$
$$+\psi 1_P(t)\frac{d}{dt}p_y(t)bY_P(t) +$$
$$+\psi 1_P(t)\left(-r_{lcp}(t)L_P(t) + p_y(t)Y_P(t) - \mathrm{Div}_P(t) + \theta_a(t)\frac{d}{dt}S_a(t)\right) + \quad (5.25)$$
$$+\phi 2_P(t)Y_P(t)dt + \Phi 1_P\left(-L_P(T) + a_Y(T)Y_P(T)\right) - \psi 1_P(T)p_y(T)bY_P(T) +$$
$$+\psi 1_P(t0)p_y(t0)bY_P(t0) + \psi 1_P(T)L_P(T) - \psi 1_P(t0)L_P(t0).$$

Это выражение достигает максимума по $Y_P(\cdot)$, $L_P(\cdot)$, $\mathrm{Div}_P(\cdot)$ тогда и только тогда, когда почти всюду на $[t0, T]$ обращаются в 0 производные по $Y_P(t)$, $L_P(t)$, $\mathrm{Div}_P(t)$ подынтегрального выражения в (5.25),

$$0 = \left(\psi 1_P(t)p_y(t) + \frac{d}{dt}\psi 1_P(t)p_y(t)b + \psi 1_P(t)\frac{d}{dt}p_y(t)b + \phi 2_P(t)\right)dY_P, \quad (5.26)$$

$$0 = \left(-\psi 1_P(t)r_{lcp}(t) - \frac{d}{dt}\psi 1_P(t)\right)dL_P, \quad (5.27)$$

$$0 = \left(D(V)\left(\frac{\mathrm{Div}_P(t)}{p_y(t)\exp\left(\frac{t}{b}\right)}\right)\frac{\exp(-\delta_P t)}{p_y(t)\exp\left(\frac{t}{b}\right)} - \psi 1_P(t)\right)d\,\mathrm{Div}_P, \quad (5.28)$$

а также производные (5.25) по $Y_P(T)$, $L_P(T)$

$$0 = \left(-\psi 1_P\left(T\right) p_y(T) b + \Phi 1_P a_Y(T)\right)\, dY_P(T)\,, \tag{5.29}$$

$$0 = \left(\psi 1_P\left(T\right) - \Phi 1_P\right)\, dL_P(T)\,. \tag{5.30}$$

Соотношения (5.22)-(5.24), (5.26)-(5.30) образуют полную систему условий для определения решения задачи фирмы-производителя.

В силу неотрицательности двойственных переменных $\Phi 1_P$ и $\psi 1_P\left(t\right)$ из (5.27) и (5.30) следует, что непрерывная функция $\psi 1_P(t)$ неотрицательна при всех $t \in [t0, T]$.

Рассмотрим условие (5.28). Поскольку функция $\mathrm{Div}_P(t)$ является кусочно-непрерывной, то она ограничена на $[t0, T]$, а тогда, в силу свойств функции полезности $V(\cdot)$, выполнено неравенство $\mathrm{Div}_P(t) > 0$, а левая часть уравнения (5.28) положительна и отделена от нуля на $[t0, T]$. Следовательно, $\psi 1_P(t)$ тоже отделена от нуля, то есть $\psi 1_P(t) > 0$, а согласно (5.30)

$$\Phi 1_P > 0\,. \tag{5.31}$$

В силу последнего условия и (5.22) терминальное условие в регулярном равновесии выполнено как равенство

$$-L_P(T) + a_Y(T) Y_P(T) = 0\,. \tag{5.32}$$

Из неравенства (5.31) и (5.29), (5.30) следует, что решение существует только при следующих значениях коэффициентов в терминальном ограничении (5.2):

$$a_Y(T) = p_y(T) b\,. \tag{5.33}$$

Введем новую переменную $\rho_P\left(t\right) = -\dfrac{\frac{d}{dt}\psi 1_P\left(t\right)}{\psi 1_P\left(t\right)}$, которую можно интерпретировать как доходность активов, которыми располагает агент. Тогда из (5.27) следует

$$\rho_P\left(t\right) = r_{lcp}\left(t\right). \tag{5.34}$$

В свою очередь из (5.23) и (5.26) при условии, что нас интересуют только те решения, в которых выпуск оказывается ненулевым ($Y_P(t) > 0$), следует

$$\phi 2_P(t) = 0\,, \qquad \rho_P\left(t\right) = \iota\left(t\right) + \frac{1}{b}\,. \tag{5.35}$$

Поскольку первое слагаемое (5.28) кусочно-дифференцируемо, функция $\mathrm{Div}_P(t)$ тоже кусочно-дифференцируема. Взяв от обеих частей уравнения (5.28) логарифмическую производную, получим

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\mathrm{Div}_P(t)}{p_y(t)\exp\left(\frac{t}{b}\right)}\right)=\frac{\left(-\rho_P(t)+\delta_P+\iota(t)+\frac{1}{b}\right)}{\left(D^{(2)}\right)(V)\left(\frac{\mathrm{Div}_P(t)}{p_y(t)\exp\left(\frac{t}{b}\right)}\right)}D(V)\left(\frac{\mathrm{Div}_P(t)}{p_y(t)\exp\left(\frac{t}{b}\right)}\right).$$

С учетом вида функции полезности фирмы (2.4) и (5.34), (5.35) это уравнение записывается в виде

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\mathrm{Div}_P(t)}{p_y(t)\exp\left(\frac{t}{b}\right)}\right)=\frac{-\delta_P}{\beta_P}\left(\frac{\mathrm{Div}_P(t)}{p_y(t)\exp\left(\frac{t}{b}\right)}\right).$$

Разрешив последнее уравнение относительно числителя левой дроби, получим

$$\mathrm{Div}_P(t)=\mathrm{Div}_P(t0)\exp\left(\frac{\beta_P-\delta_P b}{b\beta_P}(t-t0)\right)\exp\left(\int\limits_{t0}^{t}\iota(u)du\right). \qquad (5.36)$$

5.6. Нахождение равновесия. С учетом (5.20) и (5.34), (5.35) получим выражение для траектории потребления

$$C_H(t)=C_H(t0)\exp\left(\frac{1-\delta_H b}{b\beta_H}(t-t0)\right). \qquad (5.37)$$

Тогда из (5.3) и предыдущего соотношения следует, что

$$Y_P(t)=Y_P(t0)\exp\left(\frac{t-t0}{b}\right)-\frac{C_H(t0)\exp\left(\frac{t-t0}{b}\right)\beta_H\left[\exp\left(\frac{(t-t0)(1-\delta_H b-\beta_H)}{\beta_H b}\right)-1\right]}{1-\delta_H b-\beta_H}. \qquad (5.38)$$

Подставив (5.16) при (5.17) в (5.32) при условии (5.33), получим

$$\theta_a(T)S_H(T)+p_y(T)bY_P(T)=0.$$

Последнее в силу неотрицательности обоих слагаемых возможно только, если

$$\theta_a(T)S_H(T)=0, \qquad Y_P(T)=0.$$

Записав (5.38) в момент времени *T*, с учетом предыдущего равенства получаем следующее выражение:

$$C_H(t0) = \frac{1-\delta_H b - \beta_H}{\beta_H} \frac{1}{\exp\left(\frac{(T-t0)(1-\delta_H b-\beta_H)}{\beta_H b}\right)-1} Y_P(t0),$$

которое после подстановки в (5.37), (5.38) дает траектории потребления и выпуска

$$C_H(t) = \frac{1-\delta_H b - \beta_H}{\beta_H} Y_P(t0) \frac{\exp\left(\frac{1-\delta_H b}{b\beta_H}(t-t0)\right)}{\exp\left(\frac{(T-t0)(1-\delta_H b-\beta_H)}{\beta_H b}\right)-1}, \tag{5.39}$$

$$Y_P(t) = Y_P(t0)\exp\left(\frac{t-t0}{b}\right)\left(1-\frac{\exp\left(\frac{(t-t0)(1-\delta_H b-\beta_H)}{\beta_H b}\right)-1}{\exp\left(\frac{(T-t0)(1-\delta_H b-\beta_H)}{\beta_H b}\right)-1}\right).$$

Разрешив (5.6), с учетом (5.39) можем записать

$$L_H(t)+\theta_a(t)S_H(t) =$$
$$= \left(L_H(t0)+\theta_a(t0)S_H(t0) - p_y(t0)bY_P(t0)\frac{\exp\left(\frac{(t-t0)(1-\delta_H b-\beta_H)}{\beta_H b}\right)-1}{\exp\left(\frac{(T-t0)(1-\delta_H b-\beta_H)}{\beta_H b}\right)-1}\right)\times \tag{5.40}$$
$$\times\exp\left(\frac{t-t0}{b}\right)\exp\left(\int_{t0}^{t}\iota(u)du\right).$$

Записав его в момент времени T, при условии (5.16) получим выражение для начального значения курса

$$\theta_a(t0) = \frac{p_y(t0)bY_P(t0)-L_H(t0)}{S_H(t0)}. \tag{5.41}$$

Выражение (5.19) с учетом (5.4) можем записать как

$$\frac{\frac{d}{dt}\theta_a(t)}{\theta_a(t)} = \rho_p(t) - \frac{\mathrm{Div}_P(t)}{\theta_a(t)S_H(t)},$$

подставив в которое (5.35), (5.36) и (5.40) с учетом (5.41)

$$\frac{\frac{d}{dt}\theta_a(t)}{\theta_a(t)} = \iota(t)+\frac{1}{b}-$$

$$-\frac{\mathrm{Div}_P(t0)\exp\left(-\frac{\delta_P}{\beta_P}(t-t0)\right)}{\frac{L_H(t)}{\exp\left(\frac{t-t0}{b}\right)\exp\left(\int\limits_{t0}^{t}\iota(u)du\right)}+p_y(t0)bY_P(t0)\left(1-\frac{\exp\left(\frac{(t-t0)(1-\delta_H b-\beta_H)}{\beta_H b}\right)-1}{\exp\left(\frac{(T-t0)(1-\delta_H b-\beta_H)}{\beta_H b}\right)-1}\right)}.$$

После разрешения последнего дифференциального уравнения получим траекторию курса

$$\theta_a(t)=\frac{p_y(t0)bY_P(t0)-L_H(t0)}{S_H(t0)}\exp\left(\frac{t-t0}{b}\right)\exp\left(\int\limits_{t0}^{t}\iota(u)du\right)\times$$

$$\times\exp\left[-\int\limits_{t0}^{t}\frac{\mathrm{Div}_P(t0)\exp\left(-\frac{\delta_P}{\beta_P}(u-t0)\right)}{-\frac{L_H(u)}{\exp\left(\frac{u-t0}{b}\right)\exp\left(\int\limits_{t0}^{u}\iota(v)dv\right)}+p_y(t0)bY_P(t0)\left(1-\frac{\exp\left(\frac{(u-t0)(1-\delta_H b-\beta_H)}{\beta_H b}\right)-1}{\exp\left(\frac{(T-t0)(1-\delta_H b-\beta_H)}{\beta_H b}\right)-1}\right)}du\right].$$

С учетом последнего выражения и (5.40) получим динамику запаса акций

$$S_H(t)=\frac{S_H(t0)}{p_y(t0)bY_P(t0)-L_H(t0)}\times$$

$$\times\exp\left[\int\limits_{t0}^{t}\frac{\mathrm{Div}_P(t0)\exp\left(-\frac{\delta_P}{\beta_P}(u-t0)\right)}{-\frac{L_H(u)}{\exp\left(\frac{u-t0}{b}\right)\exp\left(\int\limits_{t0}^{u}\iota(v)dv\right)}+p_y(t0)bY_P(t0)\left(1-\frac{\exp\left(\frac{(u-t0)(1-\delta_H b-\beta_H)}{\beta_H b}\right)-1}{\exp\left(\frac{(T-t0)(1-\delta_H b-\beta_H)}{\beta_H b}\right)-1}\right)}du\right]\times$$

$$\times\left(-\frac{L_H(t)}{\exp\left(\frac{t-t0}{b}\right)\exp\left(\int\limits_{t0}^{t}\iota(u)du\right)}+p_y(t0)bY_P(t0)\left(1-\frac{\exp\left(\frac{(t-t0)(1-\delta_H b-\beta_H)}{\beta_H b}\right)-1}{\exp\left(\frac{(T-t0)(1-\delta_H b-\beta_H)}{\beta_H b}\right)-1}\right)\right). \quad \blacksquare$$

6. Заключение

В данной статье представлено описание модели общего равновесия, в которой фирма-производитель описана как акционерное общество, целью деятельности которого является максимизация приведенного потока дивидендов. Найдено равновесие в S-модели в предпосылках относительно вида функций полезности и производственной функции. Из сопоставления равновесных траекторий потребления и выпуска в данной модели с решением задачи планирования видно, что модель с акционерным капиталом (S-модель) имеет эффективное равновесие. Кроме того, найдены равновесные траектории всех остальных переменных.

При этом в модели остается одна степень свободы: решение найдено с точностью до траектории кредитов, взятых фирмой-производителем у собственника-потребителя. Однако такая неопределенность не влияет на траектории потребления и выпуска. Этот факт связан с видом терминальных ограничений (5.1) и (5.2) в задачах агентов.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Ж. Тироль.* Рынки и рыночная власть: Теория организации промышленности / Пер. с англ. – СПб.: Экономическая школа, 1996.
   J. Tirole. The Theory of Industrial Organization. — Cambridge, MA: MIT Press, 1988.
2. *Д. Хэй, Д. Моррис.* Теория организации промышленности. – СПб.: Экономическая школа, 1999.
   D. Hay, D. Morris. Industrial economics and organization: theory and evidence, Oxford University Press, 1991.
3. *И.Г. Поспелов.* Динамическая модель рынка // Экономика и матем. методы, 1988, т.24, №3.
   I.G. Pospelov. Dinamicheskaya model rynka // Ekonomika i matem. metody, 1988, t.24, №3.
4. *С.М. Гуриев, И.Г. Поспелов.* Неэффективные равновесия в экономике переходного периода // Управление экономикой переходного периода / Под редакцией В.В. Макарова. – М.: Наука, 1998, вып.2, с.138-163.
   S.M. Guriev, I.G. Pospelov. Neeffektivnye ravnovesiia v ekonomike perehodnogo perioda // Upravlenie ekonomikoi perehodnogo perioda / Pod redaktsiei V.V. Makarova. – M.: Nauka, 1998, vyp.2, s.138-163.
5. *K.J. Arrow, G. Debreu.* Existence of a Competitive Equilibrium for a Competitive Economy // Econometrica, 1954, v.22, №3, p.265-290.
6. *И.Г. Поспелов.* Модели экономической динамики, основанные на равновесии прогнозов экономических агентов. – М.: ВЦ РАН, 2003.
   I.G. Pospelov. Modeli ekonomicheskoy dinamiki, osnovannye na ravnovesii prognozov ekonomicheskih agentov. – M.: VTs RAN, 2003.
7. *A.I. Sotskov.* Time-consistent government policies in the Sidrausky's model // Working paper # 2003/034. – Moscow: New Economic School, 2003, 27 p.
8. *D. Acemoglu.* Introduction to Modern Economic Growth. – Cambridge, MA: MIT Press, 2007.
9. *J. Adda, R. Cooper.* Dynamic Economics. – Cambridge, MA: MIT Press, 2003.
10. *R. Barro, X. Sala-i-Martin.* Economic Growth. – Cambridge, MA: MIT Press, 2004.
11. *М.Ю. Андреев, И.Г. Поспелов, И.И. Поспелова, М.А. Хохлов.* Технология моделирования экономики и модель современной экономики России. – М.: МИФИ, 2007.
    M.Iu. Andreev, I.G. Pospelov, I.I. Pospelova, M.A. Hohlov. Tehnologiia modelirovaniia ekonomiki i model sovremennoi ekonomiki Rossii. – M.: MIFI, 2007.
12. *В.Л. Макаров, А.М. Рубинов.* Математическая теория экономической динамики в равновесии. – М.: Наука, 1973.
    V.L. Makarov, A.M. Rubinov. Matematicheskaia teoriia ekonomicheskoi dinamiki v ravnovesii. – M.: Nauka, 1973.
13. *Н.П. Пильник, И.Г. Поспелов.* Динамическая модель общего равновесия экономики Республики Казахстан // Труды МФТИ, 2013.
    N.P. Pilnik, I.G. Pospelov. Dinamicheskaia model obshchego ravnovesiia ekonomiki Respubliki Kazahstan, Trudy MFTI, 2013.

Поступила в редакцию 16.07.2013.